
2D-Flachwassergleichungen

Grundlagen - Lösungen - Einsatz

Cornel Beffa, Dr. sc. techn.

Inhalt

1	Grundlagen	2
1.1	Gleichungen und Variablen	2
1.2	Anfangs- und Randbedingungen	2
1.3	Gültigkeitsbereich	3
2	Numerische Lösung	5
2.1	Standardverfahren	5
2.2	Wichtige Begriffe	5
2.3	Genauigkeit der Zellenmittelpunkt Finite-Volumen-Methode (FVM)	6
2.4	Stabilität der Zellenmittelpunkt-FVM	7
2.5	Zeitdiskretisierung	8
3	Modelleinsatz	8
3.1	Netzgenerierung	8
3.2	Modelltests	9
3.3	Validierung	10
3.4	Anwendungsbereiche	10
4	Kontrollfragen	11
4.1	Zu den Flachwassergleichungen	11
4.2	Zur numerischen Lösung	11

1 Grundlagen

1.1 Gleichungen und Variablen

Unbekannte	$h = \text{Abflusshöhe [L]}$ $q = x\text{-Komponente des spezifischen Abflusses [L}^2\text{ T}^{-1}\text{]}$ $r = y\text{-Komponente des spezifischen Abflusses [L}^2\text{ T}^{-1}\text{]}$
Kontinuitätsgleichung	$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} = 0$
Impulsgleichung	$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} - \frac{h}{r} t_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{qr}{h} - \frac{h}{r} t_{xy} \right) = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{t_{bx}}{r}$ $\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qr}{h} - \frac{h}{r} t_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{r^2}{h} + \frac{gh^2}{2} - \frac{h}{r} t_{yy} \right) = -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{t_{by}}{r}$
Konstanten und abgeleitete Grössen	$z_b = \text{Sohlenlage [L]}$, $\tau_{bi} = \text{Sohlenschubspannungen [M L}^{-1}\text{ T}^{-2}\text{]}$, $\rho = \text{Dichte des Fluids [M L}^{-3}\text{]}$, $\tau_{ii} = \text{turbulente Normalspannungen}$, $\tau_{ij} = \text{turbulente Schubspannungen}$
Sohlenschubspannungen	$\frac{t_{bx}}{r} = \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{c_f^2}; \quad \frac{t_{by}}{r} = \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{c_f^2}$ <p>mit $(u,v) = x\text{- und }y\text{-Komponenten der Fliessgeschwindigkeit}$ und $c_f = \text{Reibungsbeiwert (z.B. aus Manning-Strickler Formel)}$</p>
turbulente Spannungen	<ul style="list-style-type: none"> – Einfluss der turbulenten Spannungen ist bedeutend, wenn Geschwindigkeitsgradienten gross sind (z.B. bei Ablösungen, Einschnürungen) – für sehr viele Anwendungen (z.B. Dammbrechwellen, Hochwasserausbreitung) kann der Einfluss der turbulenten Spannungen vernachlässigt werden. – Übersicht über verschiedene Ansätze in: Rodi W. 1984. Turbulence models and their application in hydraulics. A state-of-the-art paper. IAHR, Delft

Tabelle 1 - Übersicht 2D-Flachwassergleichungen

1.2 Anfangs- und Randbedingungen

Für den Startzeitpunkt der Simulation müssen an jedem Berechnungspunkt die Grössen der drei Unbekannten (h , q , r) bekannt sein. Liegen keine geeigneten Informationen vor, behilft man sich in der Praxis häufig mit einer der folgenden Möglichkeiten:

- (1) Annahme von Ruhe: konstanter Wasserspiegel $z = z_b + h = \text{const}$, $q = r = 0$.
- (2) Annahme eines trockenen Gerinnes („dry start“): $h = q = r = 0$.
- (3) Übernahme der Resultate einer früheren Simulation („hot start“)

An den Modellrändern müssen je nach Abflussregime die Unbekannten ebenfalls vorgegeben werden. Bestimmend ist die Anzahl der Charakteristiken, welche von Aussen auf den Modellrand treffen:

<i>Abflussregime</i>	<i>Zuflussrand</i>	<i>Wegflussrand</i>
unterkritisch (strömend)	2	1
überkritisch (schiessend)	3	0

Tabelle 2 - Anzahl benötigter Randbedingungen für die 2D-Flachwassergleichungen

Das Setzen von sinnvollen Randbedingungen ist ähnlich wie im 1D-Fall: Am Zuflussrand sollte der Abfluss Q als Zuflusshydrograph vorgegeben werden und zusätzlich die Richtung des Zuflusses. Für den Wegflussrand kommen folgende Grössen in Frage:

- (1) Wasserspiegellage (ev. Hydrograph)
- (2) Pegel-/Abflussbeziehung (falls bekannt)
- (3) Wasserspiegelgefälle oder Energieliniengefälle

Tipp: Ein Vergleich mit einem physikalischen Modell kann die Wahl der Randbedingungen erleichtern. Randbedingungen, welche sich in einem physikalischen Modell realisieren lassen, führen i.d.R. auch in einem numerischen Modell zu sinnvollen Lösungen.

1.3 Gültigkeitsbereich

Die Flachwassergleichungen basieren auf der Annahme, dass über die Fliesstiefe eine hydrostatische Druckverteilung herrscht. Dies ist erfüllt für lange und flache Wellen (Wellenlänge sehr viel grösser als Wassertiefe, Amplitude kleiner als Wassertiefe), bei denen die vertikalen Beschleunigungen der Fluidelemente beim Durchgang der Welle klein bleiben. Beim Durchgang von kurzen resp. hohen Wellen ist diese Bedingung verletzt. In der linearen Wellentheorie unterscheidet man zwischen langen Wellen (Flachwasser) und kurzen Wellen (Tiefwasser), die sich u.a. hinsichtlich Geschwindigkeit und Bewegung der Wasserteilchen unterscheiden (Tabelle unten und Vorlesungsskript Kapitel 7).

Bereich	Flachwasser	Übergang	Tiefwasser
Wellenlänge	$L/h > 20$	$2 < L/h < 20$	$L/h < 2$
Wellengeschwindigkeit	$c = \sqrt{gh}$	$c = \sqrt{\frac{gL}{2p} \tanh \frac{2ph}{L}}$	$c = \sqrt{\frac{gL}{2p}}$
Partikelpfad	linear	elliptisch	kreisförmig

Tabelle 3 - Gegenüberstellung von verschiedenen linearen Wellen mit L = Wellenlänge und h = Wassertiefe (aus Liggett J. A. 1994. Fluid Mechanics. McGraw-Hill Int. Editions)

Beim Durchgang von hohen Wellen können signifikante vertikale Beschleunigungen auftreten, was zu Abweichungen von den hydrostatischen Druckbedingungen - einer wesentlichen Voraussetzung für den Einsatz der Flachwassergleichungen - führt. Für Verhältnisse, welche nicht zu stark von hydrostatischen Bedingungen abweichen, können die klassischen Flachwassergleichungen erweitert werden. Die „Boussinesq-Gleichungen“ - benannt nach dem französischen Forscher Joseph Boussinesq (1842-1929) - enthalten zusätzliche Terme, welche den Einfluss der Krümmung der Wasseroberfläche auf die Druckverteilung berücksichtigen. Damit wird korrigiert, dass sich hohe Wellen im Vergleich zu den Flachwasserwellen weniger schnell ausbreiten und grösserer Diffusion ausgesetzt sind.

Bei stationären Abflüssen kann die Bedingung von hydrostatischem Druck bei Diskontinuitäten im Wasserspiegel (Wassersprünge, Stosswellen) oder der Gerinnesohle (Stufen) verletzt werden. Die Lösung der Flachwassergleichungen führt hier lokal zu Abweichungen von den Beobachtungen. Auch in solchen Fällen gibt es Erweiterungen zu den Flachwassergleichungen, welche jedoch in der Regel zu neuen Bestimmungsgleichungen führen.

Vorbehalten bleiben Anwendungen, wo dreidimensionale Effekte (Sekundärströmungen) wesentlich werden, beispielsweise bei starken Gerinnekrümmungen oder wo die inneren (turbulenten) Spannungen das Strömungsbild wesentlich beeinflussen. Die Abgrenzung, wo der Einsatz eines 2D-Modelles noch zulässig ist oder nicht, hängt nicht zuletzt auch von den Genauigkeitsanforderungen ab. Es existieren auch Modelle, welche auf die Tiefenmittelung verzichten und die vertikalen Geschwindigkeitsterme aus der Kontinuitätsgleichung berechnen. Solche 3D-Flachwassermodelle finden Einsatz z.B. bei der Simulation von Seen (z.B. Zirkulation infolge Windstress) oder im Küstenbereich.

2 Numerische Lösung

2.1 Standardverfahren

Zur Lösung der 2D-Flachwassergleichungen werden v.a. folgende Verfahren eingesetzt: Finite-Differenzen-Methode (FDM), Finite-Elemente-Methode (FEM) und Finite-Volumen-Methode (FVM). Folgende zwei Verfahren haben nebst der FEM bis heute eine gewisse Verbreitung gefunden:

Versetzte-Gitter Methode (FDM)	Zellenmittelpunkt - FVM
<ul style="list-style-type: none"> - Standardverfahren seit 60er Jahren - implizite Zeitdiskretisierung - sehr kompakt und effizient (Flussermittlung z.T. ohne Interpolation) - basiert i.d.R. auf Rechteckgittern - stabil nur für unterkritische Regimes ! 	<ul style="list-style-type: none"> - entwickelt in der Fluidodynamik (ab 1980) - explizite Zeitdiskretisierung - erfordert glatte Netze (sonst inkonsistent) - stabil für unter- und überkritische Regimes
<p>Kontrollvolumen für y-Impuls-gleichung</p> <p>Unbekannte ● h ■ q ▲ r</p> <p>Kontrollvolumen für Kontinuitäts-gleichung</p> <p>Kontrollvolumen für x-Impuls-gleichung</p>	<p>Dreiecksnetz</p> <p>Zellenmittelpunkt</p>

Tabelle 4 - Vergleich zweier Standardmethoden zur Lösung der 2D-Flachwassergleichungen

Die „Versetzte-Gitter-Methode“ (engl. staggered grid method) wird seit den 60er Jahren v.a. im Küstenbereich eingesetzt. Schwachpunkt ist die Instabilität bei überkritischen Abflussregimes.

Die Zellenmittelpunkt-FVM ist auch bei gemischt unter- und überkritischen Abflussregimes stabil. Sie ist deshalb bei der Anwendung der Flachwassergleichungen im Binnenbereich das Verfahren der Wahl. Die FVM ist bereits in Kapitel 1 erläutert worden. Bei der Übertragung der FVM auf zweidimensionale Probleme werden die Flüsse über die Zellenseite wie im eindimensionalen Fall behandelt.

2.2 Wichtige Begriffe

Konsistenz: Konsistenz drückt aus, dass sich die diskrete Gleichung der Differentialgleichung annähert, falls $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta t \rightarrow 0$.

Stabilität: Ein stabiles Differenzenschema verhindert das grenzenlose Anwachsen von Fehlern im Verlauf der Berechnung.

Konvergenz: Die diskrete Lösung U_i^n nähert sich der exakten Lösung $U(x,t)$ der Differentialgleichung an für jeden Punkt $x_i = i\Delta x$ und jeden Zeitpunkt $t_n = n\Delta t$, falls $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta t \rightarrow 0$.

Äquivalenztheorem von Lax: Für ein korrekt gestelltes Anfangswertproblem und eine konsistente Diskretisierung ist Stabilität eine notwendige und hinreichende Bedingung für Konvergenz.

2.3 Genauigkeit der Zellenmittelpunkt Finite-Volumen-Methode (FVM)

Die Zellenmittelpunkt-FVM besitzt wegen ihrer Stabilität bei gemischt unter- und überkritischen Strömungen eine grosse praktische Bedeutung. Um die Genauigkeit dieser Methode zu untersuchen betrachten wir als Modellgleichung die eindimensionale Konvektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

mit u = Unbekanntenvektor und f = Flussvektor. Eine diskrete Schreibweise mittels der Zellenmittelpunkt-FVM mit zentral gemittelten Flüssen lautet

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \Delta x_i + \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{2}(f_{i-1} + f_i) = 0 \tag{2}$$

Die Genauigkeit der diskreten Formulierung kann durch lokale Taylorentwicklung der Flüsse um den Punkt i bestimmt werden

$$f_{i\pm 1} = f_i \pm \Delta x_{\pm} \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\Delta x_{\pm}^2}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \pm \frac{\Delta x_{\pm}^3}{6} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} + \dots \tag{3}$$

(vgl. Bezeichnungen in Abbildung unten).

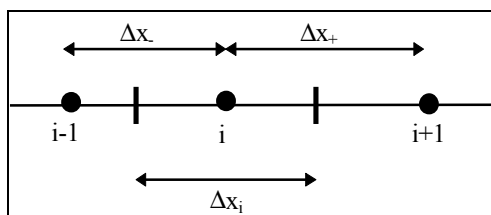


Abbildung 1 - Anordnung der Berechnungsknoten und Bezeichnungen

Ausdruck (3) eingesetzt in (2) führt nach Division mit Δx_i auf die Differentialgleichung, welche durch die diskrete Gleichung (2) beschrieben wird

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{\frac{\Delta x_+ + \Delta x_-}{2\Delta x_i}}_{\text{inkonsistent}} \frac{\partial f_i}{\partial x} = - \underbrace{\frac{\Delta x_+^2 - \Delta x_-^2}{4\Delta x_i}}_{O(\Delta x)} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\Delta x_+^3 + \Delta x_-^3}{12\Delta x_i}}_{O(\Delta x^2)} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} - \dots \tag{4}$$

Der Vergleich der Gleichungen (1) und (4) zeigt:

- (1) Für äquidistante Gitter ($\Delta x_i = \Delta x = \Delta x_+$) ist die Genauigkeit der Zellenmittelpunkt-FVM von zweiter Ordnung (Fehlerterm $O(\Delta x)$ verschwindet).

- (2) Für glatte Gitter mit $\Delta x_{\pm} = \Delta x \pm O(\Delta x^2)$ ist die Genauigkeit ebenfalls zweiter Ordnung.
- (3) Für nicht-glatte Gitter ist die Genauigkeit nur erster Ordnung.
- (4) Für nicht-glatte Gitter ist die Diskretisierung nicht konsistent, da $\frac{Dx_+ + Dx_-}{2Dx_i} \neq 1$.

2.4 Stabilität der Zellenmittelpunkt-FVM

Gleichung (2) kann auch geschrieben werden als

$$\frac{f u_i}{f t} D x_i + \frac{1}{2} (f_{i+1} - f_{i-1}) = 0 \quad (5)$$

d.h. der Fluss an der Stelle i verschwindet. Eine Bestimmung der Flüsse aus dem arithmetischen Mittel der Nachbarwerte führt dazu, dass u_i unabhängig von f_i wird. Dies äussert sich in den Ergebnissen darin, dass die numerische Lösung nicht glatt ist, sondern ein Sägezahnmuster aufweist (vgl. Abbildung unten).

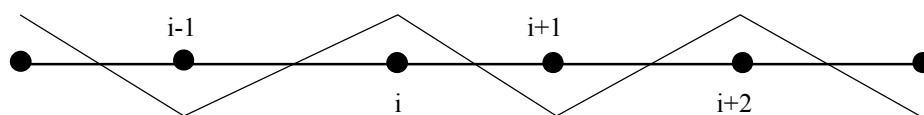


Abbildung 2 - Sägezahnmuster („wiggles“) in der diskreten Lösung bei Verwendung zentral gemittelter Flüsse

Abhilfe schaffen sog. Upwind-Verfahren, welche eine zusätzlich numerische Diffusion in das Schema einführen. Der Fluss an der Zellenseite $i+1/2$ lautet dann

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2} (f_l + f_r) - \alpha (u_r - u_l) \quad (6)$$

wobei die Indizes l und r die Werte links resp. rechts der betrachteten Zellenseite bezeichnen. Zur Bestimmung des „Faktors“ α gibt es eine Vielzahl verschiedener Vorschläge, die sich in Aufwand und physikalischer Begründung unterscheiden (siehe Vorlesungsskript Kapitel 6).

Mit der naheliegenden Wahl $l = i$ und $r = i+1$ für die Indizes erhält man ein Schema, dessen Genauigkeit von erster Ordnung ist. Für Anwendungen, wo numerische Diffusion unerwünscht ist (beispielsweise bei der Simulation von kurzen Wellen) kann die Genauigkeit des Verfahrens erhöht werden. Dazu werden die Flussterme durch Variablenextrapolation aus den benachbarten Knotenwerten bestimmt. Um auch bei Diskontinuitäten ein glattes Verhalten der Lösung zu gewährleisten müssen die Flussterme begrenzt werden durch sog. Limitierfunktionen. Am Ort einer Diskontinuität wird die Genauigkeit durch die Limiter auf erste Ordnung reduziert.

2.5 Zeitdiskretisierung

Die Lösung der numerischen Gleichungen kann auf verschiedene Arten erfolgen:

- Explizite Verfahren verwenden zur Berechnung der Variablen für den nächsten Zeitschritt ausschliesslich die bereits bekannten Werte der Variablen. Unter die expliziten Verfahren fallen auch sog. Mehrschritt-Verfahren (z.B. Prädiktor-Korrektorverfahren). Explizite Verfahren sind i.A. einfach zu programmieren, unterliegen jedoch einer Beschränkung bei der Wahl der Zeitschrittlänge (vgl. unten).
- Implizite Verfahren verwenden zusätzlich Schätzungen für die noch unbekannt Variablen zum neuen, gesuchten Zeitpunkt. Die Lösung im Punkt i hängt somit auch von der noch unbekannt Lösung der Nachbarpunkte von i ab. Dies führt auf ein iteratives Vorgehen, wobei bei jedem Iterationsschritt ein Gleichungssystem gelöst werden muss. Implizite Verfahren sind somit wesentlich aufwändiger zu programmieren, erlauben jedoch die Wahl von grösseren Zeitschritten.

Explizite Verfahren gewinnen durch die Fortschritte in der Rechnerleistung immer mehr an Bedeutung. Sie sind gebunden an die Courant-Friedrich-Lewy (CFL) Bedingung. Die CFL-Zahl ist ein Mass für die Ausbreitung einer Störung während eines Zeitschrittes Δt im Verhältnis zum Gitterabstand Δx

$$CFL = |I| \frac{Dt}{Dx} = (|u| + c) \frac{Dt}{Dx} \quad (9)$$

mit u = Fliessgeschwindigkeit und c = Wellengeschwindigkeit. Ein explizites Verfahren ist nur für kleine CFL-Zahlen stabil (meist $CFL < 1.0$). Gleichung (9) führt somit auf eine Bestimmungsgleichung für die maximal zulässige Zeitschrittlänge bei festgehaltener Gittergrösse Δx .

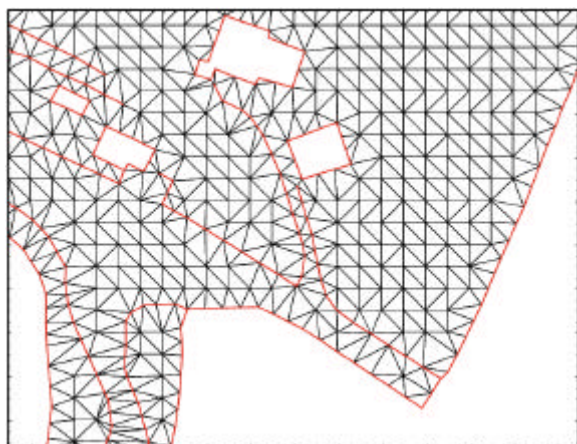
3 Modelleinsatz

3.1 Netzgenerierung

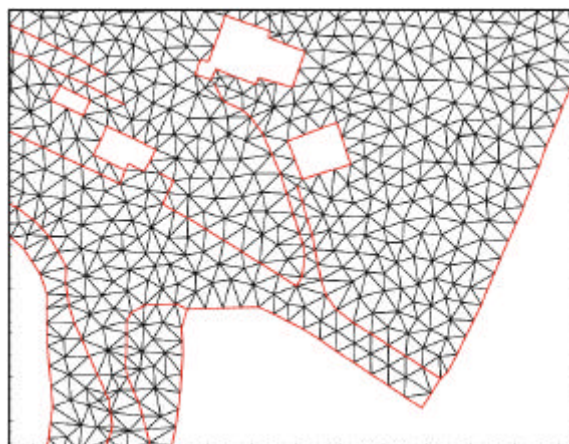
Der Netzgenerierung kommt bei praktischen Anwendung von 2D-Programmen sehr grosse Bedeutung zu, fällt hier doch oft die Entscheidung über Erfolg und Misserfolg eines Modelleinsatzes - sowohl hinsichtlich der Qualität der Resultate als auch des Zeitaufwands für den Anwender.

Beim Einsatz der FVM ist die Generierung von „glatten“ Netzen gefordert, d.h., benachbarte Zellen müssen ähnliche Dimensionen aufweisen. Bei Verwendung von Dreiecksnetzen ist die Bildung von spitzwinkligen Dreiecken zu vermeiden, d.h. die Dreiecke sollten „keine kleinen Winkel“ aufweisen. Terrainmodelle auf Basis von TIN's (Triangulated Irregular Networks), welche die Basis für die Berechnung bilden, enthalten jedoch oft sehr spitzwinklige Dreiecke. Sie sind für hydraulische Berechnungen i.d.R. nicht direkt verwendbar.

Ein frei verfügbares Werkzeug zur Erstellung von Qualitätsnetzen ist das Programm „Triangle“ (<http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>).



Netz generiert durch Ausdünnung (Buffering) eines Punkterasters



Netz generiert durch gezieltes Einfügen von Knoten (quality refinement) mit Programm Triangle

3.2 Modelltests

Wie gezeigt, sind die FVM auf glatten Netzen konsistent, d.h. der Diskretisierungsfehler nimmt mit feiner werdendem Netz ab. Diese Eigenschaft kann (soll!) benutzt werden, um die Modellfehler zu überprüfen. Dazu werden Simulationen mit unterschiedlich feinen Berechnungsnetzen ausgeführt und die Lösungen gegeneinander verglichen. Zeigen die Berechnungen keine Unterschiede mehr, so kann davon ausgegangen werden, dass die Diskretisierungsfehler keinen Einfluss auf die Resultate ausüben. Im anderen Fall muss die Netzauflösung weiter (ev. nur lokal) erhöht und der Modelltest wiederholt werden.

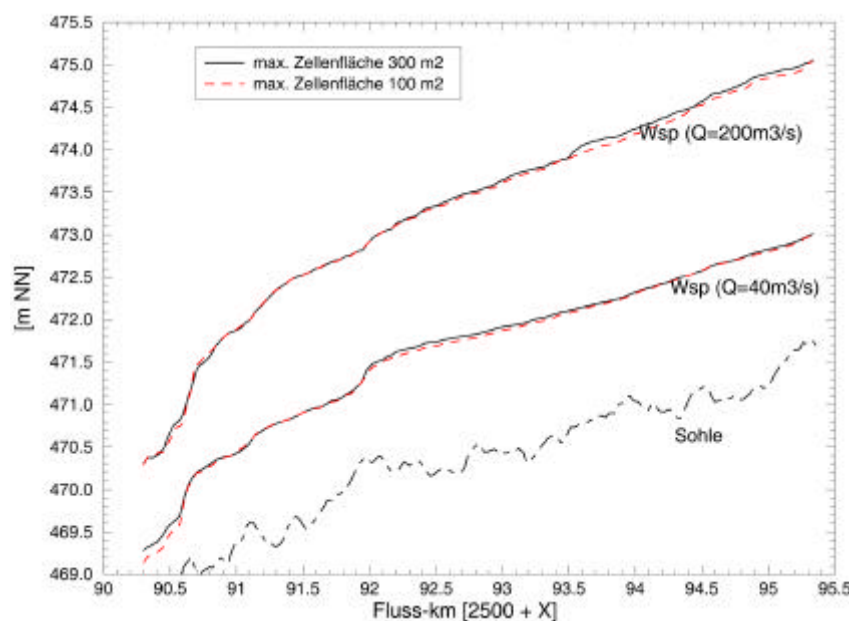


Abbildung 3 – Modelltest: Vergleich der berechneten Wasserspiegellagen für unterschiedlich feine Berechnungsnetze (Längenprofil der Donau in Ulm)

3.3 Validierung

Kalibrierung/Eichung: Anpassung von Modellparametern (z.B. Reibungsparameter), bis sich die Resultate möglichst gut an vorhandene Messungen annähern.

Inverse Modellierung: Automatische Kalibrierung der Modellparameter durch wiederholte Reproduktion der beobachteten Grössen (z.B. Levenberg-Marquardt-Algorithmus)

Validierung: Nachrechnung von beobachteten Grössen (ohne Parameterveränderung) und Diskussion der Unterschiede (inkl. kritischer Würdigung der Güte der beobachteten Grössen).

Provokative Hypothese (Prof. Jean Cunge, Universität Grenoble):

„Durch Kalibrierung verlieren Simulationsmodelle ihre Prognosefähigkeit!“

Folgerungen für den Einsatz von Abflussmodellen (Good Modeling Practice):

- (1) Zurückhaltung üben bei der Anpassung von Modellparametern aufgrund unsicherer Beobachtungen
- (2) Beobachtungen primär zur Validierung einsetzen (Lerneffekt!)

3.4 Anwendungsbereiche

- (1) Gefahrenbeurteilung: Hochwassersimulation, Damm- und Deichbruchsimulation, Belastung von Bauwerken und Verbauungen
- (2) Wasserbau: Wasserspiegellagenberechnung für flächige Abflüsse; Dimensionierung von Schutzbauten; Optimierung von Einbauten, Entnahmen und Zu-/Wegströmungen
- (3) Ökologische Fragestellungen: Beurteilung von baulichen Eingriffen auf Strömung (Fließgeschwindigkeiten, Sohlenschubspannungen); Beurteilung Fischdurchgängigkeit und Habitateigenschaften; Wasserentnahmen; Ausbreitung von Schadstoffen in Nah- und Mittelbereich
- (4) Geschiebehaushalt: Sohlenevolution, Spülungen, Verlandung von Speicheranlagen

4 Kontrollfragen

4.1 Zu den Flachwassergleichungen

- (1) Wie lauten die Unbekannten in den Flachwassergleichungen?
- (2) Welche Grössen müssen durch empirische Ansätze gewonnen werden?
- (3) Nenne Anzahl und Typen von Randbedingungen für Zu- und Wegflussränder .
- (4) Welche Annahmen schränken den Gültigkeitsbereich der Flachwassergleichungen ein?
- (5) Wie unterscheiden sich Flachwasser- von Tiefwasserwellen?
- (6) Nenne typische Anwendungsgebiete für die Flachwassergleichungen.

4.2 Zur numerischen Lösung

- (1) Was bedeuten die Begriffe „Konsistenz“, „Stabilität“ und „Konvergenz“ im Zusammenhang mit numerischen Lösungsverfahren?
- (2) Unter welcher Voraussetzung ist die Finite-Volumen-Methode (FVM) konsistent?
- (3) Welches ist der Unterschied zwischen expliziten und impliziten Lösungsverfahren (Vor- und Nachteile)?
- (4) Wie ist die CFL-Zahl definiert und welche Bedeutung hat sie beim Einsatz von expliziten Lösungsverfahren?
- (5) Wodurch zeichnen sich „glatte“ Netze aus und wie können sie generiert werden?
- (6) Wie lässt sich die Grösse der Diskretisierungsfehler abschätzen und wie können sie eliminiert werden?