



Netzoptimierung mit CFL-Bedingung

Optimizing Meshes with CFL-Condition

Cornel Beffa, Michel Cuska

Kurzfassung

Räumlich hochauflösende 2D-Simulationsmodelle über längere Gerinnestrecken und Zeiträume haben sich für eine Vielzahl von Anwendungen im Fluss- und Wasserbau etabliert. Die Nichtlinearität der Strömungsgleichungen führt dabei oft – sowohl bei expliziten wie impliziten Verfahren – zu kurzen Zeitschritten und in der Summe zu langen Rechenzeiten. Mittels Parallelisierung ist eine Reduktion der Simulationszeiten möglich. Die Performance lässt sich aber auch modellseitig verbessern, denn in der praktischen Anwendung zeigt sich: Oft limitieren einige wenige Rechenzellen die zulässige Zeitschrittlänge. Lokale Netzanpassungen erlauben es, die Zeitschrittlänge zu erhöhen und damit die Rechenzeit zu reduzieren – notabene ohne relevante Einbusse in der Genauigkeit und Investition in teure Hardware. Im Beitrag wird eine mögliche Umsetzung dieser Netzoptimierung vorgestellt und die praktische Anwendung des Verfahrens anhand eines Beispiels aufgezeigt.

Abstract (English)

2D-models for flows in open channels are widely used also for large areas and fine meshes. Using explicit numerical schemes can result in long computing time which makes modelling work uncomfortable. Often a small number of cells e.g. in deep scours or reservoirs are limiting the time step for all other mesh cells. An optimization of the mesh geometry could be useful to avoid this limitation.

The method presented starts with a coarse mesh that is refined gradually considering the CFL-condition up to a user specified step size. The Delaunay triangulator used allows to retain break lines and holes in the mesh. Besides the reduction of the calculation time – by factor 5 in the test case – the approach allows to estimate the calculation time in advance and therefore gives back more control to the modeler.

1 Einleitung

Simulationen basierend auf den tiefengemittelten Flachwassergleichungen bilden eine wichtige Grundlage für die Bearbeitung von fluss- und wasserbaulichen Fragestellungen. Die Nichtlinearität der Strömungsgleichungen und das abwechselnde Benetzen und Trockenfallen von Teilflächen stellen dabei

hohe Ansprüche an die numerischen Verfahren und sind oft für die Wahl der Zeitschrittlänge limitierend. Implizite Verfahren, welche theoretisch auch für grössere Zeitschritte stabil sind, können ihre Vorteile deshalb nur begrenzt ausspielen. In der Praxis haben sich explizite Verfahren verbreitet, welche einfacher zu programmieren sind und weniger Ressourcen benötigen. Ihr Nachteil: Die Zeitschritte können extrem klein werden, was die Rechenzeiten stark ansteigen lässt. Die Lösung wird meist im Einsatz sehr leistungsfähiger Hardware gesucht (Mehrkernprozessoren, GPU). Wie die folgenden Ausführungen zeigen werden, ist häufig bereits bei der Netzerstellung ein erhebliches Optimierungspotential vorhanden.

2 CFL-Bedingung

Ein kurzer Exkurs soll die grundsätzliche Problematik bei der Wahl der zulässigen Zeitschrittlänge beleuchten. Die Flachwassergleichungen beschreiben den Impulstransport in der Strömung. Deren Eigenschaften lassen sich vereinfacht anhand der Konvektionsgleichung

$$u_t + \lambda u_x = 0 \quad [1]$$

untersuchen, mit u = Wellenhöhe und λ = Wellengeschwindigkeit. Die Subskripts bezeichnen die Ableitungen nach der Zeit t und dem Ort x . Diese Gleichung soll numerisch gelöst werden für die diskrete Variable $u_i^n = u(x_i, n\Delta t)$. Verwendet wird ein explizites Upwind-Schema erster Ordnung gemäss

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad \text{mit} \quad \sigma = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad [2]$$

Der einzige verbleibende Parameter in dieser Gleichung wird als Courant-Zahl σ bezeichnet. Um das Verhalten dieses Schemas zu untersuchen, wird die Konvektion einer dreiecksförmigen Welle betrachtet (Abb. 1).

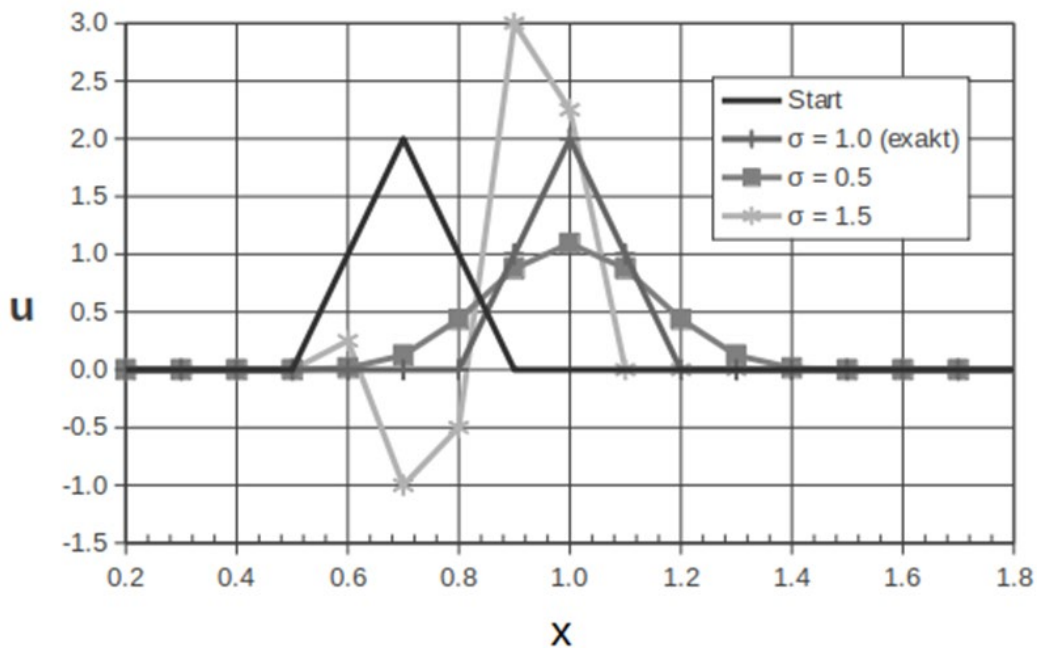


Abb. 1: Numerische Lösung der Konvektionsgleichung für unterschiedliche Courant-Zahlen (nach 3 Zeitschritten)

Je nach Grösse der Courant-Zahl entwickelt sich die numerische Lösung sehr unterschiedlich:

- 1.0: Es wird die exakte Wellenform reproduziert.
- 0.5: Die Welle flacht ab und dehnt sich aus; das Schema weist eine hohe numerische Diffusion auf.
- 1.5: Die Welle stellt auf, ähnlich einer negativen Diffusion; bei einer Fortsetzung der Rechnung wird das Verfahren instabil.

Die notwendige Begrenzung $\sigma < 1$ für die Stabilität des (expliziten) Schemas wird als CFL-Bedingung bezeichnet (Courant *et al.* 1928). Diese einschneidende Bedingung muss auch bei der numerischen Lösung der Flachwassergleichungen beachtet werden. Deren Wellengeschwindigkeiten lassen sich aus der charakteristischen Form herleiten (vgl. Beffa 1994). Massgebend wird der Term

$$\lambda = |v| + \sqrt{gh} \quad [3]$$

mit v = Fließgeschwindigkeit, g = Erdbeschleunigung und h = Fliesstiefe. Grosse Fliesstiefen beispielsweise in Stauhaltungen oder in Kolkwannen können zu hohen Wellengeschwindigkeiten führen.

Für zweidimensionale Verhältnisse wird die Schrittweite Δx durch den Abstand der Netzknoten angenähert. Für Zellenmittelpunkte von glatten Dreiecksnetzen (ohne kleine Innenwinkel) entspricht der mittlere Punktabstand näherungsweise dem Durchmesser des Innenkreises

$$\Delta x \approx 0.88\sqrt{A} \quad [4]$$

mit A = Zellenfläche. Aus Gl. 4 ergibt sich für die Mindestgrösse einer Berechnungszelle bei vorgegebener Zeitschrittlänge die CFL-Bedingung

$$A > 1.3(\lambda \Delta t)^2 \quad [5]$$

und damit ein einfaches Kriterium zur Wahl geeigneter Elementgrössen. Die zulässige Elementfläche ist näherungsweise proportional zur Fliesstiefe (vgl. Gl. 3).

3 Netzoptimierung

Rechenetze werden üblicherweise durch die Vorgabe der räumlichen Auflösung generiert. Die zulässige Zeitschrittlänge stellt sich «a posteriori» während der Simulation ein; eine vorgängige Abschätzung der Rechenzeiten ist dadurch kaum möglich. Grundsätzlich passender ist es, mit der Zeitschrittlänge die «zeitliche» Diskretisierung vorzugeben und unter Beachtung von Gl. 5 ein «optimiertes» Netz zu generieren. Für Strömungsmodelle in Küstenregionen wird dieser Ansatz schon länger angewendet (Horstmann & Molkenthin, 1996).

Voraussetzung für die Netzoptimierung sind Kenntnisse über die Wellengeschwindigkeit. Soll die Netzgeometrie nicht während der Simulation angepasst werden, ist bei Fließgewässern eine vorgängige Simulation erforderlich. Dies führt zu folgenden Arbeitsschritten:

1. Erstellen eines «feinen» Netzes mit der minimal angestrebten Zellengrösse
2. Wahl eines geeigneten Abflusses (z. B. maximaler Schwallabfluss) und Simulation auf dem «feinen» Netz bis zum Erreichen eines stationären Zustandes
3. Export der resultierenden Wellengeschwindigkeiten
4. Erstellen eines «groben» Netzes mit der maximal zulässigen Zellengrösse
5. Import der Wellengeschwindigkeit und schrittweises Verfeinern der Netzzellen unter Beachtung der CFL-Bedingung (Gl. 5).

Für den letzten Schritt ist ein Werkzeug zur stufenweisen Verfeinerung von bestehenden Netzzellen nötig. Geeignet dazu ist beispielsweise das Programm *Triangle* (Shewchuk, 1996), welches die Vorgabe von maximal zulässigen

Zellflächen erlaubt unter Beachtung von Qualitätskriterien (Mindestgrösse der Innenwinkel), Zwangslinien und Aussparungen.

Ein Ergebnis dieser schrittweisen Optimierung ist in Abb. 2 dargestellt am Beispiel eines verzweigten Gerinneabschnittes.

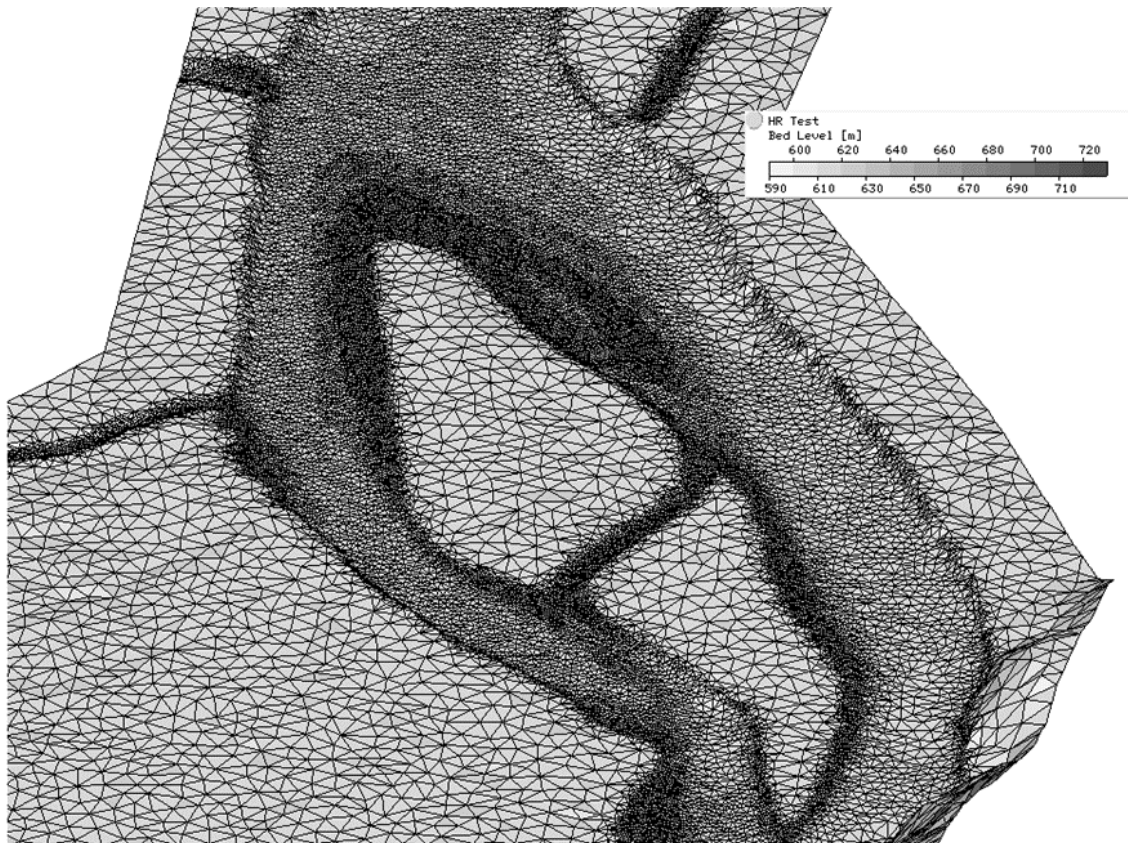


Abb. 2: Numerische Lösung der Konvektionsgleichung für unterschiedliche Courant-Zahlen (nach 3 Zeitschritten)

Ersichtlich ist die grobe Diskretisierung der trockenen Modellbereiche (Zellenfläche 32 m^2). Der eigentliche Flussschlauch wird an den seichten Rändern mit der höchsten Auflösung von 1 m^2 abgebildet. Tiefere Abflussbereiche oder solche mit hohen Geschwindigkeiten weisen eine gröbere Auflösung auf.

Der «Nutzen» der Optimierung lässt sich darstellen als Summenkurve der zulässigen Zeitschrittlängen über alle Netzelemente (Abb. 3).

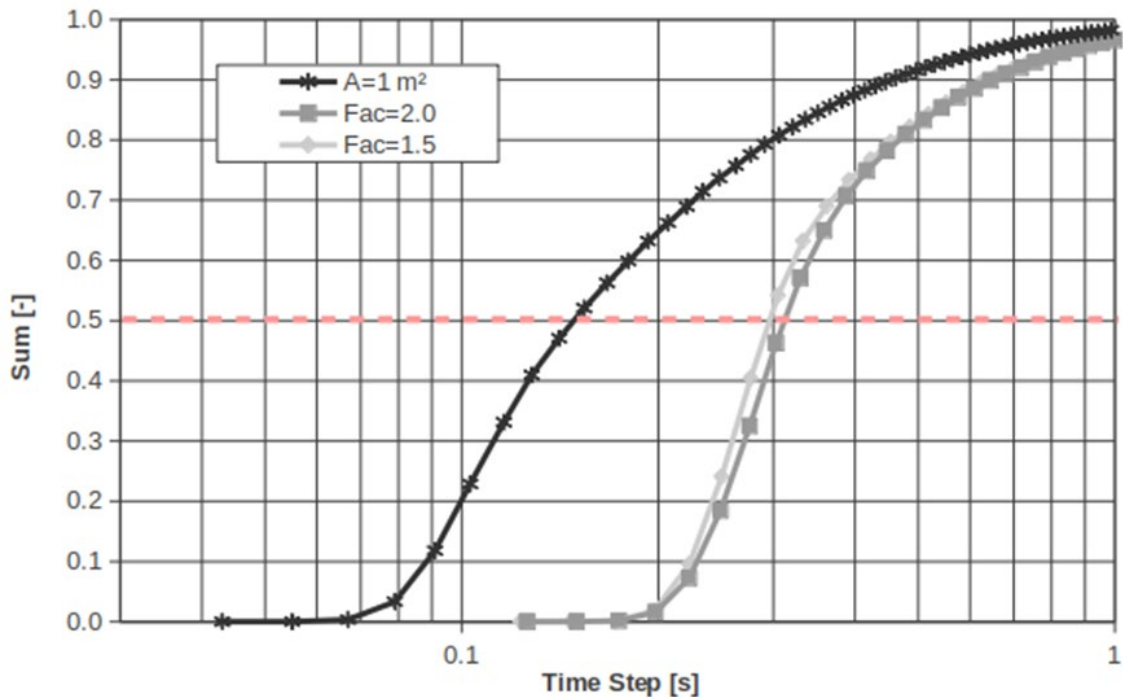


Abb. 3: Summenkurve der Zeitschrittlänge für das initiale Netz (1 m^2) und nach Optimierung (Zeitschrittvorgabe 0.2 s mit Schrittweiten für die Verfeinerung von 2.0 resp. 1.5).

Das initiale Netz weist eine sehr breite «Zeitschrittverteilung» auf; der kürzeste und für die Berechnung massgebliche Zeitschritt beträgt 0.04 s . Mit der Netzoptimierung konnte der Zeitschritt auf 0.13 s angehoben werden. Die Rechenzeit reduziert sich dadurch um einen Faktor 3 . Zusammen mit der reduzierten Elementzahl ergibt sich eine Beschleunigung der Berechnung um rund einen Faktor 5 . Die Genauigkeit der Resultate (im konkreten Fall die Schwall- und Sunkraten durch Kraftwerksbetrieb) bleibt ungeschmälert erhalten.

4 Diskussion

Die CFL-Bedingung kann bei hoher räumlicher Auflösung zu sehr kleinen Zeitschritten und entsprechend langen Rechenzeiten führen. Besonders bemerkbar macht sich dies, wenn ein Modell neben offenen Fliesstrecken auch tiefe Kolkbereiche oder Stauhaltungen umfasst. Eine apriori-Abschätzung der Zeitschrittlängen und der Rechenzeiten ist bei rein räumlicher Netzgenerierung nicht zuverlässig möglich.

Wird die CFL-Bedingung bereits bei der Netzerstellung berücksichtigt, lässt sich die Effizienz der Modellierung wesentlich erhöhen und der Modellierer gewinnt gleichzeitig die Kontrolle über die Zeitschrittlänge zurück.

Der Zusatzaufwand für die Netzoptimierung ist vergleichsweise bescheiden, sofern die nötigen Werkzeuge zur Verfügung stehen. Die oben vorgestellte

schrittweise Netzverdichtung ist in einem Programm implementiert worden und läuft weitgehend automatisch ab. Auch grosse Netze mit mehreren Millionen Zellen lassen sich innert wenigen Minuten optimieren. Voraussetzung für den Einsatz sind Kenntnisse über die Wellengeschwindigkeiten. Für Gerinneabflüsse müssen diese Angaben durch eine vorgängige Simulation gewonnen werden.

Der Mehraufwand zur Generierung optimierter Netze wird vor allem dann lohnend, wenn Modelle für eine Vielzahl von Szenarien genutzt werden und längere Zeitperioden zu simulieren sind. Auch für Modelle im operativen Prognoseeinsatz bietet sich die Netzoptimierung an, um deren Reaktionszeiten zu minimieren.

Referenzen

- Beffa C. (1994). Praktische Lösung der tiefengemittelten Flachwassergleichungen. VAW Mitteilung Nr. 133, ETH Zürich.
- Courant R., Friedrichs K. O. & Lewy H. (1928). Über die partiellen Differenzialgleichungen der mathematischen Physik. Math. Annalen, 100, 32-74.
- Hirsch C. (1988). Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization. Wiley – Interscience Publication.
- Horstmann O., Molkenhuth F. (1996). Advanced grid modeling for coastal and nearshore regions. Hydroinformatics'96, Müller (ed.), Balkema, Rotterdam, 501 – 508..
- Shewchuk J. R. (1996). Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. 1st Workshop on applied computational geometry, ACM, 124-133.

Adressen der Autoren

Cornel Beffa (korrespondierender Autor)

fluvial.ch

CH-6422 Steinen, Bahnhofstrasse 13a

Email: cbeffa@fluvial.ch

Michel Cuska

Axpo Power AG

CH-5401 Baden, Parkstrasse 23

Email: michel.cuska@axpo.com